第5章 解线性方程组的直接方法

5.5.1 线性方程组解的扰动

5.5.1 线性方程组解的扰动

1. 知识引入
2. 理论讲解
3. 融会贯通
4. 课堂小结

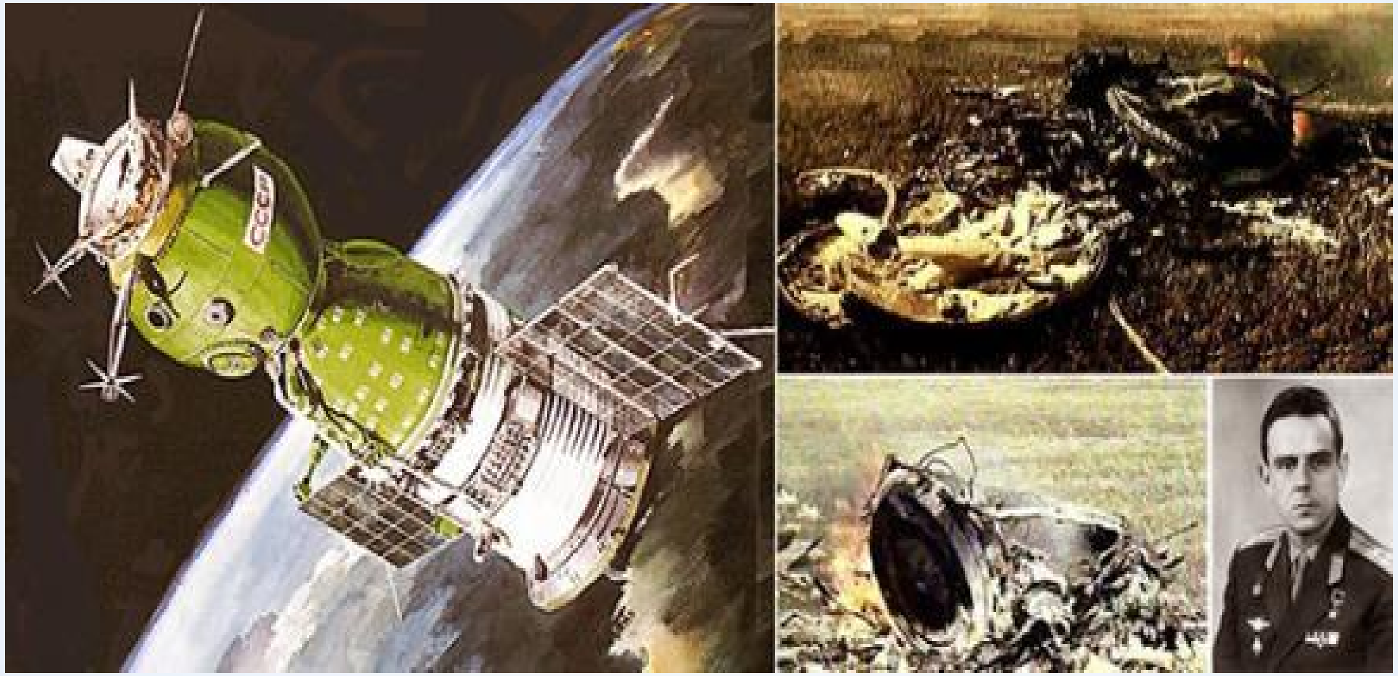
1 知识引入

Knowledge introduction

- 案例引入
- 案例分析
- 问题提出

案例引入

1967年4月23日，前苏联的联盟一号宇宙飞船在返回大气层时，突然发生了恶性事故----减速降落伞无法打开，最终导致坠毁.



宇航员科马洛夫在与女儿的最后通话提到：

联盟一号今天发生的一切，就是**因为地面检查时忽略了一个小数点......**

案例引入

引例 考察如下两个线性方程组的求解问题

(1) $$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix};$$ (2) $$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2.0001\end{bmatrix}.$$

解 方程组（1）的精确解为

$$(x_1,x_2)=(2,0)^T;$$

方程组（2）的精确解为

$$(x_1,x_2)=(1,1)^T.$$

由此可以看出， 当(1) 中常数项的第2个分量只有 0.0001 的微小变化，但方程组的解变化很大！

案例分析

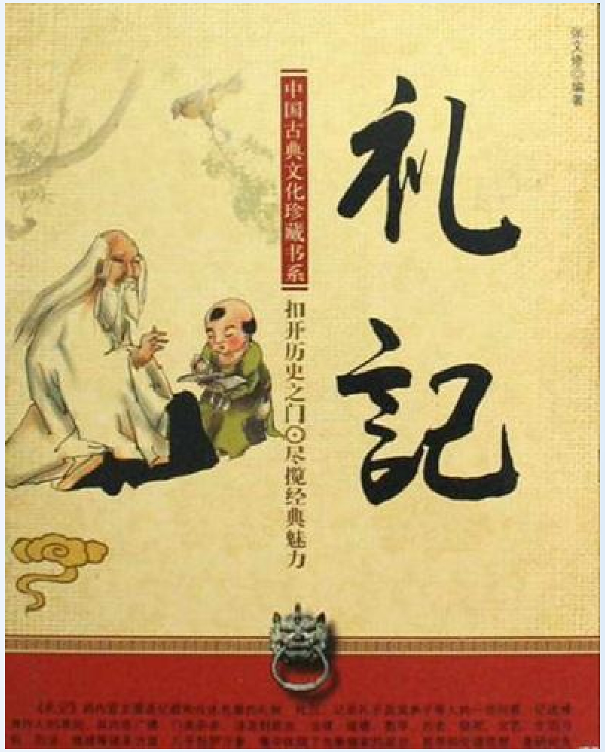
引例表明线性方程组常数项的微小变化可能会对方程组的解造成很大影响.

《礼记·经解》的《易》曰：

“ 君子慎始，差若毫厘，谬以千里. ”

意思为：

君子行事需要谨慎，开始时有一点小错误，最后也可能酿成大错.



问题提出

考虑如下线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$

其中$\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为方程组的精确解.

在实际问题中，$\boldsymbol{A}$ (或 $\boldsymbol{b}$) 中的元素通常是测量得到的， 或是通过计算得到的. 由测量得到的数据常带有某些观测误差，而通过计算得到的数据又总是包含舍入误差. 这些误差经常会影响问题的求解. 因此， 实际处理的矩阵都是含有扰动的矩阵$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ (或$\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$)， 其中 $\delta\boldsymbol{A}$ (或$\delta\boldsymbol{b}$) 为相应的扰动.

问题：

从数学上如何衡量矩阵的扰动 (或常数项的扰动) 对线性方程组的解带来的影响呢？

2 理论讲解

Interpretation of the theory

- 方程组的病态性
- 常数项的扰动
- 系数矩阵的扰动
- 矩阵的条件数

方程组的病态性

定义1

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或常数项 $\boldsymbol{b}$ 的微小变化，引起方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

解的巨大变化，则称此方程组为“病态”方程组，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为“病态”矩阵（相对于方程组而言）；否则，称此方程组为“良态”方程组，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为“良态”矩阵.

注意：矩阵的“病态”性质是矩阵本身的特性.

常数项的扰动

下面我们将找出刻画矩阵“病态”性质的量. 为此, 分两种情形讨论.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是精确的，$\boldsymbol{b}$ 有扰动 $\delta\boldsymbol{b}$，相应的解为 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ ，则由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b},$$

得

$$\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{b}.$$

由算子范数的相容性条件，得

$$||\delta\boldsymbol{x}||\leq||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\delta\boldsymbol{b}||. \tag{5.5.1}$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 得

$$||\boldsymbol{b}||\leq||\boldsymbol{A}||\cdot||\boldsymbol{x}||,$$

即

$$\frac{1}{||\boldsymbol{x}||}\leq\frac{||\boldsymbol{A}||}{||\boldsymbol{b}||}. \tag{5.5.2}$$

常数项的扰动

于是由 (5.5.1) 和 (5.5.2)， 得到如下定理.

定理1

设 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ ，且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b},$$

则

$$\frac{||\delta\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||}\leq||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\boldsymbol{A}||\cdot\frac{||\boldsymbol{\delta b}||}{||\boldsymbol{b}||}.$$

上式给出了解的相对误差的上界，还表明了常数项的相对误差在解中可能放大

$$||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\boldsymbol{A}||$$

倍.

系数矩阵的扰动

(2) 设 $\boldsymbol{b}$ 是精确的，$\boldsymbol{A}$ 有扰动 $\delta \boldsymbol{A}$，相应的解为 $\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x}$，则

$$(\boldsymbol{A}+\delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}. \tag{5.5.3}$$

如果不对 $\boldsymbol{A}$ 加以限制，$\boldsymbol{A}+\delta \boldsymbol{A}$ 可能奇异，而

$$\boldsymbol{A}+\delta \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A}),$$

由5.4节定理20可知，当 $||\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A}||<1$ 时，

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A})^{-1}$$

存在.

系数矩阵的扰动

由 (5.5.3) 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 可推出

$$\delta \boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\delta \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}.$$

由此，并利用5.4节定理20可推得

$$||\delta \boldsymbol{x}|| \le \frac{||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\delta \boldsymbol{A}||\cdot||\boldsymbol{x}||}{1-||\boldsymbol{A}^{-1}(\delta \boldsymbol{A})||}. \tag{5.5.4}$$

设 $||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\delta \boldsymbol{A}||<1$ ， 利用(5.5.4)，得

$$\frac{||\delta \boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||} \le \frac{||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\boldsymbol{A}||\cdot\frac{||\delta \boldsymbol{A}||}{||\boldsymbol{A}||}}{1-||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\boldsymbol{A}||\cdot\frac{||\delta \boldsymbol{A}||}{||\boldsymbol{A}||}}. \tag{5.5.5}$$

系数矩阵的扰动

由以上分析，我们可以得到如下定理.

定理2

设$\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，且

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b},$$

如果 $||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\delta\boldsymbol{A}||<1$ ，则（5.5.5）成立.

由上述定理可知，如果 $\delta\boldsymbol{A}$ 充分小，且在条件 $||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\delta\boldsymbol{A}||<1$ 下，(5.5.5) 式说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相对误差 $||\delta\boldsymbol{A}||/||\boldsymbol{A}||$ 在解中可能放大

$$||\boldsymbol{A}^{-1}||\cdot||\boldsymbol{A}||$$

倍.

矩阵的条件数

由前面两个定理可知：量 $||\boldsymbol{A}^{-1}|| \cdot ||\boldsymbol{A}||$ 实际上刻画了解对原始数据变化的灵敏程度，即刻画了方程组的“病态”程度. 于是，我们可以引入下述定义.

定义2

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，称数

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_v = ||\boldsymbol{A}^{-1}||_v \cdot ||\boldsymbol{A}||_v \qquad (v = 1, 2, \infty)$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数.

由上面讨论知，

(1) 当 $\boldsymbol{A}$ 的条件数相对大，即 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})_v \gg 1$ 时， 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 是“病态”的(即 $\boldsymbol{A}$ 是“病态”矩阵，或者说 $\boldsymbol{A}$ 是坏条件的，相对于方程组而言);

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 的条件数相对小时，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 是“良态”的(或者说 $\boldsymbol{A}$ 是好条件的).

3

融会贯通

digest

案例求解

灵活应用

案例求解

下面我们回到引例.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}.$$

该方程组系数矩阵在2-范数意义下的条件数为

$$\operatorname{cond}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \right)_2 \approx 4.0002 \times 10^4 \gg 1.$$

Matlab 程序代码及结果：

```
>>  A=[1    1;  1     1.0001];
>> cond=norm(A,2)*norm(inv(A),2)

cond =
    4.000200007500565e+04
```

灵活应用

思考题:

判断线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

是“良态”的还是“病态”的?

提示：

$$\operatorname{cond}\left(\begin{bmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)_2 \approx 1.0001 \times 10^4 \gg 1.$$

4

课堂小结

In-class conclusion

知识小贴士

课程反思

课堂小结

知识小贴士

线性方程组系数矩阵的条件数经常用于衡量方程组病态与否.

① 当条件数 $\gg 1$ 时，方程组是病态的，即系数矩阵或常数项的相对微小变化，可能会引起解的巨大变化;

② 当条件数相对较小时，方程组是良态的.

线性方程组系数矩阵的条件数还能够反映系数矩阵扰动(或常数项扰动)所造成解的相对误差的变化.

课程反思

反思1

联盟一号的事故警示着人们：对待人生不能有丝毫的马虎；否则，即使是一个细枝末节，也会让你付出沉重的甚至是永远无法弥补的代价.

做为大学生，对待自己的学习和生活同样应当如此！

反思2

对于条件数比较大的线性方程组求解，难道我们就束手无策了吗？

谢 谢