第 4 章　数值积分与数值微分

4.3.1 复合梯形积分公式

4.3.1 复合梯形积分公式

1. 知识引入
2. 理论讲解
3. 课堂小结

1 知识引入

- 问题提出
- 案例引入
- 案例分析

问题提出

定积分的计算通常是采用牛顿-莱布尼兹公式进行计算．然而，有些被积函数是不能用初等函数进行表示，导致定积分不能直接计算．例如，

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

鉴于此，那么我们该如何计算出这类积分的值呢？

知识回顾：定积分的几何意义

当被积函数 $f(x)$ 为非负函数时，区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值恰好等于由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，直线 $x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

案例引入

刘徽是中国古代卓越的数学家之一，他在《九章算术》中提出了一种方法——“割圆术”，并利用该方法计算出圆的面积和圆周率.

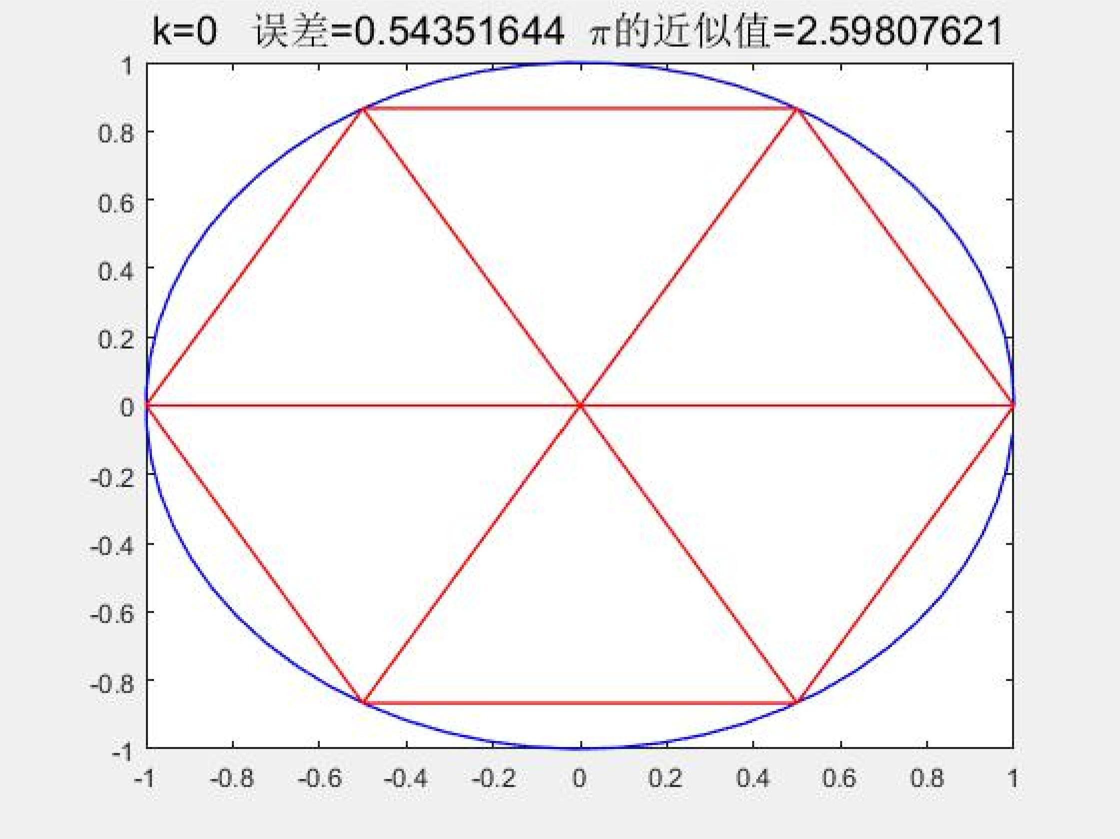
刘徽大胆地应用了“以直代曲、无限趋近”的思想，提出以内接正 6×2^k 边形去近似圆，从而求出圆面积的近似值 $\overline{S}$ ，并进一步求得圆周率

$$\pi \approx \overline{S}/r^2.$$

下面我们尝试利用割圆术来计算圆面积和圆周率，其中取圆半径 $r=1$， $k=9$.

刘徽(约225年—约295年)

案例分析



可以看出，当 k 的取值越来越大时，三角形布满了圆的内部，充分体现了“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．

2 理论讲解

Interpretation of the theory

- 从实例出发
- 复合梯形积分公式
- 收敛性与稳定性
- 问题求解

从实例出发

为了简单起见，我们选取以下定积分为例.

$$\int_0^5 xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

显然，被积函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的原函数可用初等函数表示.

利用分部积分法，有

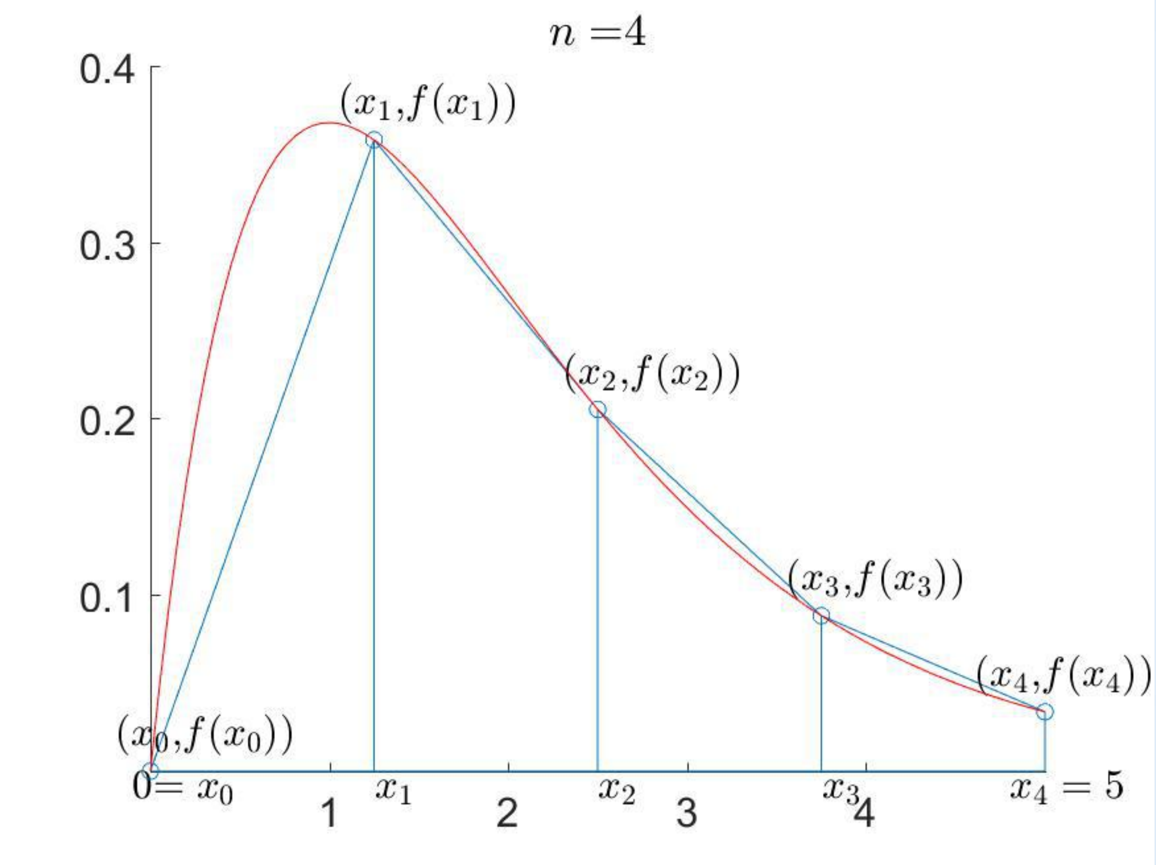
$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 xe^{-x}\mathrm{d}x \\ &= (-xe^{-x})\big|_0^5 + \int_0^5 e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= (-(x+1)e^{-x})\big|_0^5 \\ &= 1 - 6e^{-5}. \end{aligned}$$

从实例出发

下面利用割圆术中“以直代曲、无限趋近”的思想计算积分．分如下三步:

Step 1 等距剖分

将积分区间 $[0,5]$ 作 n 等分，等分节点为 $x_i=\frac{5i}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$ ，过节点作垂直于 x 轴的直线，与曲线$f(x)=xe^{-x}$相交的交点为$(x_i,f(x_i))$， 将相邻的交点两两连成直线段，这样由x轴、曲线$y=f(x)$及直线 $x=5$ 围成的区域被分成 n个梯形(最左边的图形可以看作是两点重合的梯形).



从实例出发

Step 2 计算梯形的面积

第 i 个小梯形的面积

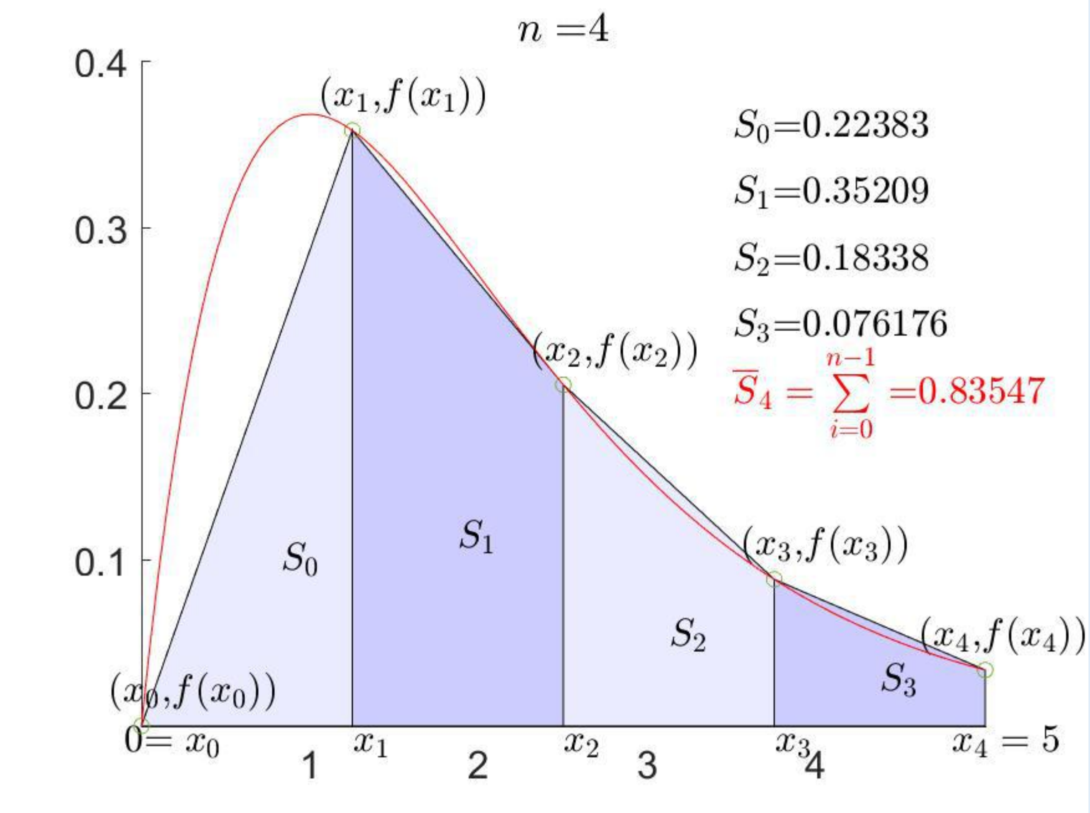
$$S_i = \frac{5}{2n}(f(x_i) + f(x_{i+1})),$$

其中 $i = 0, 1, \cdots, n-1.$

Step 3 求和

将 n 个小梯形的面积求和为

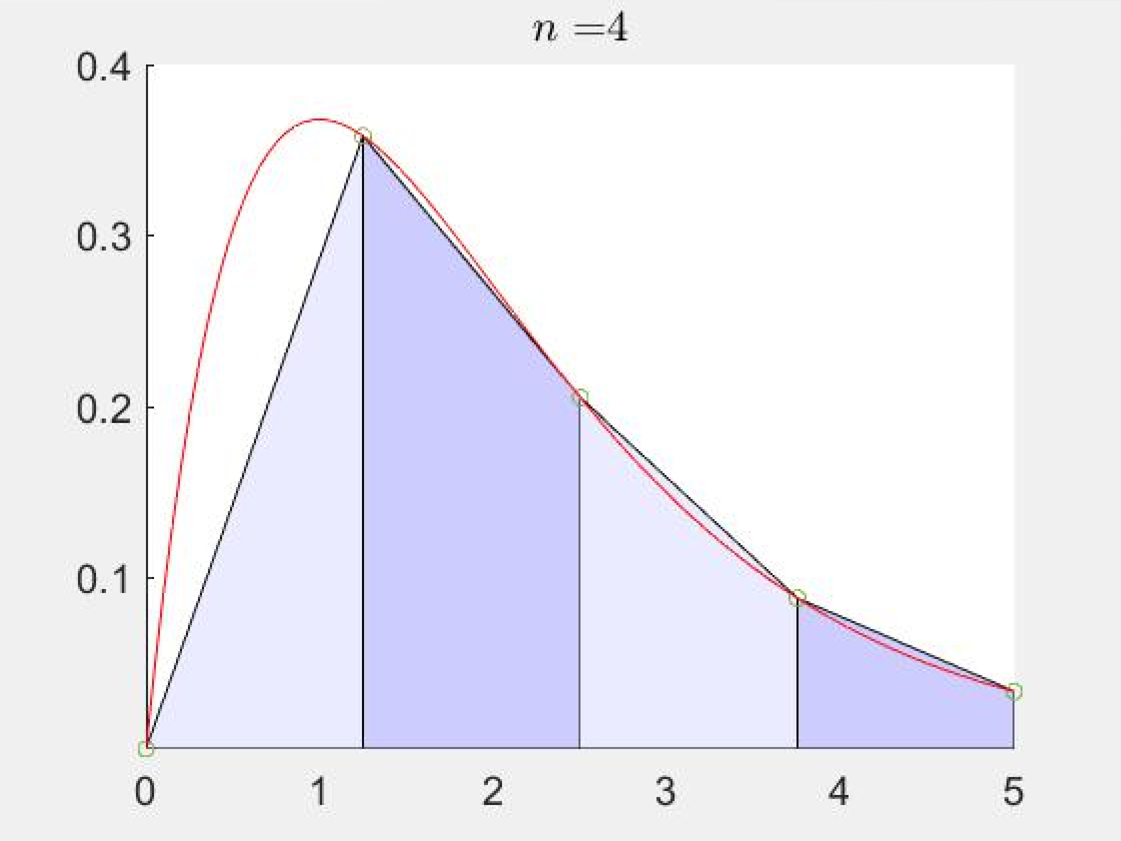
$$\bar{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{5}{2n}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$



从实例出发

下面给出实验数据.

n	$\overline{S}_n$	$I-\overline{S}_n$
4	0.835474884	0.124097434
8	0.926771814	0.032800504
16	0.951254724	0.008317594
32	0.957485472	0.002086846
64	0.959050139	0.000522179
128	0.959441744	0.000130574



显然，当 n 越来越大时, $\overline{S}_n$ 越来越接近 I .

在计算上述积分时，是将积分区间等分成若干个子区间，再在每个子区间上用梯形公式计算，最后求和，得到了积分的近似值.

复合梯形积分公式

下面介绍复合梯形积分公式的一般形式. 对于定积分 $\int_a^b f(x)dx$ ，我们将区间 $[a,b]$ 等分为 n 份，等分点 $x_k = a + kh(k=0,1,\cdots,n)$,$h=(b-a)/n$, 在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上采用梯形公式， 得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+R_n(f) \\
&= \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]+R_n(f),
\end{aligned}
$$

其中 $R_n(f)$ 为积分余项.

复合梯形积分公式

记

$$\boxed{T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)],}$$

称为**复合梯形积分公式**.

因为

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}),$$

所以复合梯形积分公式的余项为

$$R_n(f) = I - T_n = -\frac{1}{12} h^3 \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k), \qquad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

收敛性与稳定性

若$f''(x)$ 在 $[a,b]$上连续， 由介值定理可知，则在(a,b)上存在一点η， 使得

$$f''(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k).$$

于是

$$R_n(f)=-\frac{1}{12}h^3\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\quad \eta\in(a,b).$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

因此，复合梯形积分公式是 h^2 阶收敛的. 前面的数值实验也验证了这一点.

收敛性与稳定性

重新回到计算 $\int_0^5 xe^{-x}\mathrm{d}x$ 的数值实验数据.

n	$\overline{S}_n$	$I-\overline{S}_n$	$Ratio$
4	0.835474884	0.124097434	
8	0.926771814	0.032800504	1.9197
16	0.951254724	0.008317594	1.9795
32	0.957485472	0.002086846	1.9948
64	0.959050139	0.000522179	1.9987
128	0.959441744	0.000130574	1.9997

从上表中最后一列可知， 随着 n 成倍增大，相邻两层网格的误差比率越来越接近 2 ！

这也验证了复合梯形积分公式的误差是 h^2 阶！

注: 相邻两层网格的误差比率计算公式为 $\log_2(\frac{|I-\overline{S}_n|}{|I-\overline{S}_{2n}|})1$.

收敛性与稳定性

若$f''(x)$ 在 $[a,b]$上连续， 由介值定理可知，则在$[a,b]$ 上存在一点η， 使得

$$f''(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k).$$

于是

$$R_n(f)=-\frac{1}{12}h^3\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\quad \eta\in[a,b].$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

因此，复合梯形积分公式是 h^2 阶收敛的.

注意到复合梯形积分公式的系数均为正数，因此它还是稳定的.

问题求解

思考题

利用复合梯形求积公式计算

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\boldsymbol{x}}\mathbf{d}\boldsymbol{x}\ ,\quad 1$$

要求等分段数 $n = 8$.

提示：

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1}$，因此，在计算过程中 $\frac{\sin x}{\boldsymbol{x}}$ 在零处的值取为1 .

3

课堂小结

In-class conclusion

知识小贴士

课程反思

知识小贴士

① 复合梯形积分公式是计算积分的常用数值方法之一，具有形式简单、易于编程实现等特点；

② 复合梯形积分公式是 h^2 阶收敛的，且是稳定的.

课程反思

反思1

刘徽的《割圆术》原文共1800字，包含了深刻的科学原理，首次使用极限方法证明圆周率的存在（超越欧几里得和阿基米德），得到当时最好的结果3.1416．这是载入中国数学史册的大事件，值得我们永远铭记在心.

反思2

除复合梯形积分公式计算数值积分外，是否还有其他具有更高精度的积分公式？

谢 谢